МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

НЕРАВЕНСТВА И ВЛОЖЕНИЯ

(Методические материалы к специальным курсам по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики)

В.П. Бурский

Долгопрудный
МФТИ 2022

УДК 517.9

Неравенства и вложения (Методические материалы к общим и специальным курсам по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики) / Составитель В.П. Бурский. – Долгопрудный: МФТИ, 2022. – 31 с.

В пособии собраны основные неравенства, которые часто используются в общих и специальных курсах по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. Даны определения и некоторые описания важнейших используемых понятий, функциональных пространств, и их взаимосвязей. Пособие призвано помочь студенту сориентироваться в информации, записываемой в виде неравенств.

Составитель В.П. Бурский

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждому исследователю хорошо известно положение, когда он в процессе своей работы вынужден обращаться к различным книгам или статьям с тем, чтобы уточнить или освежить в памяти некоторые известные факты, формулы или формулировки. Как правило, это требует времени, и иногда – немалого. Ещё труднее положение студента, только начинающего осваивать те или иные области науки и желающего найти тот или иной факт, поскольку, в отличие от специалиста, у него ещё не успело сложиться представление о структуре и об основных положениях изучаемой области. Как представляется автору, ему было бы весьма полезным иметь в одном месте некое собрание фактов, относящихся к определённой теме.

В предлагаемом вниманию читателя пособии собраны некоторые основные неравенства, которые часто используются в исследованиях по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики (хотя их область применения далеко не ограничивается указанными областями знания). Тем самым, пособие призвано помочь студенту как-то сориентироваться в море информации, записываемой в виде неравенств. Автор надеется также, что и специалист сможет найти в данном пособии некоторую полезность для себя.

Отметим, что для свободного обращения с пособием от читателя требуется знание основных определений анализа и линейной алгебры, а также общей топологии, типа понятий метрического пространства, топологического пространства, открытого и замкнутого множества, окрестности элемента, базы топологии, непрерывности отображения. Некоторые основные определения и факты напоминаются в тексте и сносках. Доказательства сознательно не были помещены в текст, так как они значительно увеличили бы объём пособия, и затруднили бы создание общей картины, что является одной из главных целей пособия. Как правило, излагаемые факты и определения сопровождаются ссылками на источник, где можно найти доказательства и/или комментарии, и составитель стремился по возможности ссылаться на более доступную литературу.

Ниже $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ – произвольная область, $\overline{G}$ – её замыкание, $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ – произвольная ограниченная область; и оговаривается, если G или Ω – область с гладкой границей

Автор-составитель

I. НЕРАВЕНСТВА

Здесь приведены некоторые неравенства, которые часто используются в исследованиях по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики.

1. **Неравенства для модулей**:
для любых вещественных или комплексных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство:

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|,$$

в частности, для любых двух чисел a_1, a_2

$$\big|\,|a_1| - |a_2|\,\big| \le |a_1 - a_2| \le |a_1| + |a_2|.$$

Для любой вещественной или комплексной функции $u(x)$ и любой области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$

$$\left|\int_G u(x)\,dx\right| \le \int_G |u(x)|\,dx$$

в частности, для любых $-\infty \le a \le b \le \infty$:

$$\left|\int_a^b u(x)\,dx\right| \le \int_a^b |u(x)|\,dx.$$

и для любых $-\infty \le a \le \infty, -\infty \le b \le \infty$:

$$\left|\int_a^b u(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |u(x)|\,dx\right|.$$

2. **Неравенства для степеней** (см., напр., [2],[19]):
для любых чисел $a \ge 0$, $b \ge 0$, $p > 1$, $0 < \varepsilon < 1$ справедливы неравенства:

$$a^p + b^p \le (a+b)^p \le 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right),$$

$$(a+b)^p \le (1+\varepsilon)a^p + c_1(\varepsilon, p)b^p,$$

$$|a-b|^p \ge (1-\varepsilon)a^p - c_2(\varepsilon, p)b^p.$$

3. **Неравенства для средних** (см., напр., [2],[4]):
для любых положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливы неравенства:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Более общо: назовём средним чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ порядка $\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus 0$ число

$$M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

средним чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ порядка 0 число $M_0(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, средним чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ порядка ∞ число $M_\infty(a_1, a_2, ..., a_n) = \max a_i$ и средним порядка $-\infty$ чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ число $M_{-\infty}(a_1, a_2, ..., a_n) = \min a_i$.

Тогда, если $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$, то

$$M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) \le M_\beta(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Заметим, что число

$M_1(a_1, a_2,..., a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ называется *средним арифметическим,*

$M_0(a_1, a_2,..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ называется *средним геометрическим,*

$M_{-1}(a_1, a_2,..., a_n) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$ называется *средним гармоническим*

и

$M_2(a_1, a_2,..., a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ называется *средним квадратичным.*

4. **Неравенства для средних с весами** (см. [2]):

для любых положительных чисел $a_1, a_2,..., a_n$ и любых положительных чисел $\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n$, $\sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_n = 1$ (называемых весами) взвешенным средним порядка $\alpha \in \boldsymbol{R} \backslash 0$ чисел $a_1, a_2,..., a_n$ назовём число $M_\alpha(a, \sigma) = \left(\sigma_1 a_1^\alpha + \sigma_2 a_2^\alpha + ... + \sigma_n a_n^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, взвешенным средним порядка 0 – число $M_0(a, \sigma) = a_1^{\sigma_1} \cdot a_2^{\sigma_2} \cdot ... \cdot a_n^{\sigma_n}$, взвешенным средним порядка ∞ – число $M_\infty(a, \sigma) = \max a_i$ и взвешенным средним порядка $-\infty$ – число $M_{-\infty}(a, \sigma) = \min a_i$. Тогда, если $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$, то справедливы неравенства:

$$M_\alpha(a_1, a_2,..., a_n) \le M_\beta(a_1, a_2,..., a_n).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$. В частности, при $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = 1/n$ получим соотношения п.3.

5. **Неравенство Минковского** (H.Minkowski, 1896) (см. [1], [2]):

для вещественных чисел $x_i, y_i \ge 0,\ i = 1,..., n;\ p > 1$ выполнено неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}.$$

При $p = 2$ это неравенство называют *неравенством треугольника*. При $p = 1$ это – очевидное равенство. При $p<1$, $p \neq 0$ неравенство заменяется на противоположное (для $p<0$ следует считать, что $x_i, y_i > 0$). В каждом из этих случаев $p \neq 1$ равенство достигается тогда и только тогда, когда строки $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ пропорциональны.

5. **Обобщённое неравенство Минковского** (см. [1]):

для вещественных чисел $x_{ij} \ge 0,\ i = 1,..., n;\ j = 1,..., m;\ p > 1$ выполнено неравенство:

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{ij}\right)^p\right]^{1/p} \le \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{ij}^p\right)^{1/p}.$$

При $p<1$, $p\neq 0$ неравенство заменяется на противоположное (для $p<0$ следует считать, что $x_{ij}>0$). Равенство достигается тогда и только тогда, когда строки $\{x_{i1}\},\ldots,\ \{x_{im}\}$ пропорциональны.

6. **Неравенство Минковского для интегралов** (см. [1], [2]):

для любых вещественных или комплексных функций $u(x)$ и $v(x)$, интегрируемых с p-й степенью, любой области $G\subseteq \boldsymbol{R}^n$ и $p>1$ справедливо неравенство:

$$\left(\int_G |u(x)+v(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_G |u(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_G |v(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Для $0<p<1$ неравенство заменяется на противоположное.
Хотя Минковский это неравенство не приводил и не доказывал, оно носит его имя ввиду явной аналогии с неравенством Минковского для сумм.

7. **Неравенство типа Минковского для произведений** (см. [2]):

для натурального числа n и для вещественных чисел $x_i, y_i \ge 0$ выполнено неравенство:

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{1/n} \ge \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n}$$

8. **Неравенство Коши** (A.Cauchy, 1821) (см. [1], [2]):

для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Неравенство Коши с ε:

для любых чисел $a\ge 0$, $b\ge 0$, $\varepsilon>0$

$$ab \le \varepsilon a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

9. **Неравенство Буняковского** (В.Я.Буняковский, 1859) (иногда называют неравенством Шварца (H.A.Schwarz,1884, без ссылок на Буняковского)) (см. [1], [2]):

для любых вещественных или комплексных функций $u(x)$ и $v(x)$, интегрируемых с квадратом, и любых $-\infty \le a \le b \le \infty$:

$$\left|\int_a^b u(x)\,v(x)\,dx\right|^2 \le \int_a^b |u(x)|^2\,dx \int_a^b |v(x)|^2\,dx$$

10. **Обобщённое неравенство Буняковского** (см. [1], [2]):

для любых вещественных или комплексных функций $u(x)$ и $v(x)$, интегрируемых с квадратом, и любой области $G\subseteq \boldsymbol{R}^n$

$$\left|\int_G u(x)\,v(x)\,dx\right|^2 \le \int_G |u(x)|^2\,dx \int_G |v(x)|^2\,dx$$

11. **Неравенство Гёльдера для сумм** (O.Hölder,1889) (см. [1], [2]):

для любых вещественных или комплексных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ и $p > 1$, $n = 2,3,\ldots,\infty$ справедливо неравенство (q – т.н. сопряжённый показатель: $1/p+1/q = 1$):

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

При $0 < p < 1$ знак неравенства Гёльдера меняется на противоположный. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $|a_i|^p = C|b_i|^q$, а аргументы $\arg(a_i b_i)$ не зависят от i. При $p = q = 2$ получим неравенство Коши (п.8).

12. **Обобщённое неравенство Гёльдера для сумм** (см. [2]):

для любого набора вещественных или комплексных чисел $\{a_{ij}\}$, чисел $\rho_i \ge 0$ и степеней $p_i \ge 1$, где $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1, 2,\ldots, m$ выполнено неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{1i} a_{2i} \ldots a_{mi}\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i |a_{1i}|^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i |a_{2i}|^{p_2}\right)^{1/p_2} \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i |a_{mi}|^{p_m}\right)^{1/p_m}$$

13. **Неравенство Гёльдера для интегралов** (O.Hölder,1889) (см. [1], [2]):

для любой области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ и для любых вещественных или комплексных функций: $u(x)$, интегрируемой со степенью $p > 1$, и $v(x)$, интегрируемой со степенью q ($1/p+1/q = 1$), выполнено

$$\left|\int_G u(x)\, v(x)\, dx\right| \le \left(\int_G |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_G |v(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.$$

При $p = q = 2$ получим неравенство Буняковского (п.10).

14. **Обобщённое неравенство Гёльдера для интегралов** (см. [2]):

для любой области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ и для любого набора вещественных или комплексных функций $\{u_i(x)\}$, $i = 1,2,\ldots,m$, где функция $u_i(x)$ интегрируема со степенью $p_i \ge 1$, $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i = 1$, выполнено неравенство:

$$\left|\int_G u_1(x) \ldots u_m(x)\, dx\right| \le \left(\int_G |u_1(x)|^{p_1}\, dx\right)^{1/p_1} \ldots \left(\int_G |u_m(x)|^{p_m}\, dx\right)^{1/p_m}.$$

15. **Неравенство Юнга** (W.H. Young, 1912) (см. [1], [2]):

для любой вещественной непрерывной строго возрастающей функции $u(x)$, $x \ge 0$, $u(0) = 0$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ и обратной для функции $u(x)$ функции $v(x)$, $v(u(x)) = x$:

$$ab \le \int_0^a u(x)\, dx + \int_0^b v(x)\, dx,$$

причём знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $b = u(a)$.
В частности, при $u(x) = x^{p-1}$, $p > 1$, $v(x) = x^{q-1}$ ($1/p+1/q = 1$) получим неравенство:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

16. **Неравенство Юнга с ε**:
для любых чисел $a \ge 0,\ b \ge 0,\ \varepsilon > 0,\ p > 1,\ q = p/(p-1)$ (т.е. $1/p+1/q = 1$)

$$ab \le \varepsilon a^p + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}\,\frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}q}\; b^q .$$

17. **Неравенство Чебышева для конечных монотонных последовательностей** (П.Л.Чебышев,1882) (см. [2]):
для любых вещественных чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \le n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

18. **Неравенство Чебышева для конечных монотонных функций** (П.Л.Чебышев,1882) (см. [2]):
для любых вещественных функций $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ справедливо неравенство:

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx ,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ либо обе возрастают, либо обе убывают.

19. **Неравенство Иенсена** в дискретной форме (O.Hölder,1889) (см. [2]):
для любых вещественных чисел $x_1, x_2,\ldots, x_m$ и выпуклой функции f (непрерывная функция f называется *выпуклой*, если $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (например, при $f'' > 0$) и *вогнутой*, если имеет место обратное неравенство), любых $\lambda_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,m,$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$ справедливо неравенство:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_m f(x_m) .$$

Для вогнутой функции f имеет место обратное неравенство. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$, либо когда $f(x) -$ линейная функция. При $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 1/m$, получим неравенство между средними

$$M_1(a_1, a_2,\ldots, a_n) \le M_\alpha(a_1, a_2,\ldots, a_n) .$$

20. **Неравенство Иенсена** в интегральной форме (J.L.Jensen,1906) (см. [2]):
для любой области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ и для любой вещественной функции $x(t)$, выпуклой функции f (см. предыдущий пункт) и функции $\lambda(t) \ge 0,\ \int_G \lambda(t)\,dt = 1$ выполнено:

$$f\left(\int_G \lambda(t)x(t)\,dt\right) \le \int_G \lambda(t)\,f(x(t))\,dt$$

21. **Неравенство Беллмана** (R.Bellman, 1956) (см. [3]):
Для любого $p \in (1,\infty)$ и любых вещественных вогнутых функций $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 [u(x)]^p\,dx = 1,\quad \int_0^1 [v(x)]^p\,dx = 1,\quad u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$$

имеет место неравенство:

$$\int_0^1 u(x)v(x)\,dx \ge \frac{(p+1)^{1/p}(q+1)^{1/q}}{6}.$$

Максимум правой части достигается при $p = q = 2$.

22. **Неравенство Гильберта** (см. [2]):

для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $p > 1$, $q = p/(p-1)$ (т.е. $1/p+1/q = 1$) справедливо неравенство:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m} < \frac{\pi}{\sin(\pi p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_m^q\right)^{1/q}.$$

Д.Гильберт (D.Hilbert) доказал это неравенство с некоторой постоянной в правой части на лекциях по интегральным уравнениям, доказательство опубликовано Г.Вейлем (H.Weyl, 1908), точная постоянная $\dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$ найдена И.Шуром (I.Schur, 1911).

23. **Интегральный аналог неравенства Гильберта** (см. [2]):

для любых вещественных функций: $f(x) \ge 0$, интегрируемой с p-й степенью, и $g(x) \ge 0$, интегрируемой с r-й степенью, $p > 1$, $r > 1$, $\lambda = 1/p+1/r \le 1$ выполнено неравенство

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K^{\lambda}(x,y) f(x) g(y)\,dx\,dy \le C^{\lambda}\left(\int_0^{\infty} f^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^{\infty} g^r(x)\,dx\right)^{1/r},$$

где $K(x,y)$ – неотрицательное ядро, однородное со степенью -1 и $C = \int_0^{\infty} t^{-1/\lambda q} K(1,t)\,dt$, $q = p/(p-1)$ (т.е. $1/p+1/q = 1$). В частности, для $K(x,y) = 1/(x + y)$ константа равна $C^{\lambda} = (\pi/\sin\lambda q)^{\lambda}$. Точность этой константы доказана при $q = r$.

24. **Неравенство Харди** (G.H. Hardy,1920) (см. [2]) :
для $m = 1,2,\ldots,\infty$ и любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_m$, $p > 1$ и $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ выполнено неравенство:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{m} a_n^p.$$

Константа q^p – точная.

25. **Неравенства Харди для интегралов** (G.H. Hardy,1920) (см. [2]):

для $p > 1$ и любой вещественной функции $f(x)$, интегрируемой с p-й степенью, и $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (заметим, что $F(0) = 0$) выполнено неравенство:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{|F|}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p\,dx.$$

Константа q^p – точная.

Если $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ и функция $xf(x)$ интегрируема с p-й степенью, то выполнено неравенство:

$$\int_0^{\infty} |F(x)|^p\,dx \le p^p \int_0^{\infty} |xf(x)|^p\,dx.$$

Константа p^p – точная.

Имеются обобщения неравенств Харди для интегралов на произвольные промежутки и веса.

26. **Неравенство Карлемана** (F.Carleman,1923) (см. [2]) :
для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2,..., a_i,...$ выполнено неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \le e\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Константа e – точная.

27. **Неравенство Карлемана для интегралов** (F.Carleman,1923) (см. [2]) :

для любой вещественной интегрируемой неотрицательной функции $f(x)$:

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln\, f(t)\,dt\right\}dx \le e\int_0^{\infty} f(x)\,dx .$$

28. **Неравенство Карлсона** (F.Carlson,1934) (см. [2]) :

для $n = 1,2,\ldots,\infty$, для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2,..., a_i,...$ выполнено

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 \le \pi^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2 .$$

Константа π^2 – точная. Э.Ландау заметил, что вместо i^2 можно поставить $(i - 1/2)^2$ с той же константой.

29. **Интегральное неравенство Карлсона** (см. [2]):

для любой функции $f(x) \ge 0$, $x > 0$, $f(x) \in L_2(0,\infty)$, $xf(x) \in L_2(0,\infty)$

$$\left\{\int_0^{\infty} f(x)dx\right\}^4 \le \pi^2\left\{\int_0^{\infty} f^2(x)dx\right\}\left\{\int_0^{\infty} x^2 f^2(x)dx\right\}.$$

Константа π^2 – точная.

30. **Неравенство Гроноулла** (см. [5]):

для любых вещественных непрерывных на $[a,b]$ функций $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ неравенство

$$\exists C > 0, \forall t \in [a,b],\quad g(t) \le C + \int_a^t g(s) f(s)\,ds$$ влечёт неравенство

$$\forall t \in [a,b],\quad g(t) \le C\exp\int_a^t f(t)\,dt$$ с той же C.

В частности, если $C = 0$, то $g(t) \equiv 0$.

Это неравенство по существу восходит к Пеано (G.Peano, 1886), Гроноулл (T.H. Gronwall, 1919) доказал частный случай, более общая формулировка дана Рейдом (W.T. Reid, 1930).

31. **Изопериметрическое неравенство Боннезена** (T.Bonnesen,1921)[13]:
Пусть K – выпуклая область на плоскости, r – радиус наибольшего круга, который можно поместить в K, R – радиус наименьшего круга, в который можно поместить K, L – периметр, а F – площадь области K . Тогда справедливо неравенство:

$$\Delta = L^2 - 4\pi F \ge \pi^2 (R-r)^2.$$

Равенство $\Delta = 0$ достигается только при $R = r$, т.е. когда K есть круг.

32. **Классическое изопериметрическое неравенство** ([4]):
для $n = 1,2,\ldots$, ограниченной области $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ объёма V и площади границы S справедливо неравенство:

$$n^n \nu_n V^{n-1} \le S^n,$$

где ν_n – объём единичного n-мерного шара. Доказательство дано: для $n = 2$ Ф.Эйдлером (F.Eidler, 1882), для $n = 3$ – Г.Шварцем (H.Schwarz, 1890), для всех $n \ge 2$ – Л.А.Люстерником (1935) и Э.Шмидтом (E.Schmidt, 1939). Имеются многочисленные обобщения.

33. **Геометрические неравенства** (см. [2],[3],[18]) –
неравенства для ограниченной области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ объёма V, диаметра D, радиуса R наименьшего описанного шара и т.п. Например,

неравенство Юнга: $$R \le \left(\frac{n}{2n+2}\right)^{1/2} D;$$

неравенство Гейла: $$l \le \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2} D,$$

где l – длина ребра наименьшего описанного симплекса;

неравенство Бибербаха: $$V \le 2^{-n} \nu_n D^n,$$

где ν_n – объём единичного n-мерного шара;

неравенство Люмиса–Уитни: $$V \le \prod_{i=1}^{\lambda} V_i^{n/k\lambda},$$

где V_i – k-мерный объём проекции области на i- ю из $\lambda = C_n^k$ (число сочетаний) попарно различных k-мерных координатных плоскостей для декартовых координат.

34. **Изопериметрические неравенства математической физики** (см. [20],[18],[14],[4]):

неравенство Сен-Венана: $$2\pi P \le V^2,$$

где V – площадь сечения S призматической упругой балки, P – жёсткость кручения этой балки, $P = 2\int\limits_S\int\limits_S v\,dxdy$, $v_{xx} + v_{yy} + 2 = 0$, $v|_{\partial S} = 0$;

неравенство Рэлея: $$\Lambda^2 \le \pi j^2 V^{-1},$$

где V – площадь мембраны M, j – первый положительный корень бесселевой функции $J_0(x)$, Λ – основная частота мембраны, т.е. Λ^2 – наименьшее собственное число оператора $-\Delta$ с задачей Дирихле: $w_{xx} + w_{yy} + \Lambda^2 w = 0$, $w|_{\partial M} = 0$;

неравенство Пуанкаре: $$3V \le 4\pi C^3,$$

где V – объём области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$, C – электростатическая ёмкость тела G:
$C = -\dfrac{1}{4\pi u_0} \displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} ds$, где n – внешняя нормаль, u – решение граничной задачи
$\Delta u = 0,\quad u|_{\partial G} = u_0 = const$.

II. ПРОСТРАНСТВА

Напомним определения некоторых наиболее используемых пространств анализа[1]. Ниже $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ – произвольная область, $\overline{G}$ – её замыкание, $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ – произвольная ограниченная область; оговаривается, если G или Ω – область с гладкой границей[2].

Пространства последовательностей (См., напр.,[1], [8], [9].)

1) l_p , $p \geq 1$ – банахово пространство[3] последовательностей вещественных или комплексных чисел $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, суммируемых с p-й степенью, с нормой

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

---

[1] Под пространствами анализа здесь понимаются линейные топологические пространства. Это связано с необходимость использовать сложение и умножение на число для элементов исследуемых совокупностей функций, последовательностей или операторов, а также различные понятия сходимости для них же (ниже от читателя требуется знание основных определений анализа и линейной алгебры, а также общей топологии, типа понятий метрического пространства, топологического пространства, открытого и замкнутого множества, окрестности элемента, базы топологии, непрерывности отображения). **Сходимость** в произвольном множестве M, как правило, определяется с помощью топологии (например, последовательность $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ элементов топологического пространства M называется сходящейся к элементу $x \in M$, если для всякой окрестности U элемента x существует номер N, начиная с которого все $x_n \in U$), см.[1,7,8]. Иногда сходимость в произвольном множестве M определяют саму по себе. А именно, **пространством со сходимостью по Фреше** называется множество M, подмножество L (сходящихся последовательностей) множества $M^{\boldsymbol{N}}$ всех последовательностей элементов множества M и отображение $\lim$: $L \to M$, удовлетворяющее свойствам: 1) всякая стабилизирующаяся последовательность $\{ x_1, x_2, ..., x_n, x, x, x, ... \}$ сходится и имеет пределом элемент x, 2) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности является сходящейся и имеет тот же предел. В пространстве со сходимостью по Фреше можно ввести хаусдорфову (т.е. у каждой пары различных точек существуют непересекающиеся окрестности) топологию, сходимость последовательностей в которой совпадёт с заданной, если операция замыкания $\overline{S}$ подмножества S из M , состоящая в добавлении к S пределов всевозможных сходящихся последовательностей элементов из S, обладает свойством $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$. В сепарабельном (т.е. со счётной базой топологии, что в метрическом пространстве эквивалентно наличию счётного плотного множества) топологическом пространстве топология полностью определяется операцией замыкания с помощью последовательностей (см.[6,7]).

Линейное топологическое пространство E – множество, являющееся и топологическим, и линейным пространством с непрерывными операциями сложения и умножения на скаляр (в анализе, как правило, вещественный или комплексный). База топологии в E , как правило, задаётся системой окрестностей нуля $\{U_j\}_{j \in J}$ (J – некоторое множество индексов, $0 \in U_j \subset E$), как набор множеств $\{x + U_j\}_{j \in J,\, x \in E}$. Система (иногда говорят: фильтр) окрестностей нуля, порождающая базу топологии любого линейного топологического пространства, может быть задана с помощью семейства полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ так: $U_{\alpha,\varepsilon} = \{x \in E \mid p_\alpha(x) < \varepsilon\}_{\alpha \in A, \varepsilon > 0}$.

Полунорма p – это неотрицательная функция на линейном пространстве со свойствами:

$$1)\ p(\lambda u) = |\lambda|\, p(u),\ 2)\ p(u+v) \leq p(u) + p(v).$$

Полунорма называется **нормой**, если $p(u) = 0$ влечёт $u = 0$.

[2] См. сноску на стр. 19.

[3] Напомним, что **банахово пространство** – это полное линейное нормированное пространство. Полнота метрического пространства M с расстоянием $d(x,y)$ означает, что каждая фундаментальная последовательность x_j (т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall j,k \geq N, d(x_j, x_k) < \varepsilon$) сходится (т.е. $\exists x \in M, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall j \geq N, d(x_j, x) < \varepsilon$). Напомним также, что расстояние в нормированном пространстве вводится правилом $d(x,y) = \|x - y\|$. Напомним ещё, что **гильбертово пространство** – это банахово пространство с нормой, порождённой скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, и, что банахово пространство является гильбертовым тогда и только тогда, когда его норма удовлетворяет равенству параллелограмма: $\forall a, \forall b, \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$, см. [1].

2) m или l_∞ – пространство ограниченных последовательностей вещественных или комплексных чисел $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$ с нормой

$$\|a\|_{l_\infty}=\sup_n |a_n|.$$

Классические пространства функций[1]

3) $C[a,b]$ – банахово пространство непрерывных на $[a,b]$, $-\infty\le a<b\le\infty$ вещественных или комплексных функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{C[a,b]}=\sup_{a\le t\le b}|x(t)|.$$

4) $C(a,b)$ – пространство Фреше[2] непрерывных на $(a,b), -\infty\le a\le b\le\infty$ вещественных или комплексных функций $x(t)$, со счётным набором норм

$$\|u\|_k=\max_{x\in[c_k,d_k]}|u(x)|,\ \text{где}\ c_k\to a+0,\ d_k\to b-0.$$

---

[1] См., напр.,[1], [8], [9].

[2] **Пространство Фреше** – полное метрическое линейное пространство с непрерывными операциями сложения и умножения на скаляр; часто это – счётно нормированное пространство. **Счётно нормированное пространство** E – линейное топологическое пространство, топология которого порождена счётным семейством норм: $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2,\ldots,\|\cdot\|_k,\ldots$, согласованных между собой по возрастанию, т.е. $\forall k\ge 1, \exists C_k>0, \forall u, \|u\|_k\le C_k\|u\|_{k+1}$, при этом считается, что $u_m\to u$, когда для каждого k $\|u_m-u\|_k\xrightarrow{m\to\infty}0$. Нетрудно переопределить нормы так, чтобы все $C_k=1$, т.е. $\forall u\in E, \|u\|_1\le\|u\|_2\le\ldots\le\|u\|_k\le\ldots$, но топология пространства осталась бы той же. Такое пространство E метризуемо (т.е. в нём можно ввести метрику, например, формулой $\rho(u,v)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|u-v\|_k\big/(1+\|u-v\|_k)$), но оно не обязательно полно в этой метрике. Полное счётно нормированное пространство можно представлять себе как пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$, где банахово пространство B_k построено пополнением пространства E по норме $\|\cdot\|_k$, оно также часто называется **проективным пределом** семейства пространств B_k. Точно так же, т.е. как пересечение, можно представлять себе проективный предел семейства линейных топологических пространств E_k, вложенных с топологией по сужению: $E_1\supset E_2\supset\ldots$ (говорят, что линейное топологическое пространство E **вложено с топологией** в линейное топологическое пространство F, если оператор вложения $E\subset F$ – непрерывен; для случая сепарабельных пространств, т.е. со счётной базой топологии, это равносильно тому, что всякая сходящаяся последовательность в E сходится в F, а для банаховых пространств – равносильно неравенству: $\forall u\in E, \|u\|_F\le C_k\|u\|_E$). **Индуктивный предел** семейства банаховых пространств B_k – линейное топологическое пространство, топология которого порождена счётным семейством норм: $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2,\ldots,\|\cdot\|_k,\ldots$, согласованных между собой по убыванию, т.е. $\forall u, \|u\|_{k+1}\le C_k\|u\|_k$, при этом считается, что $u_m\to u$, когда для некоторого k $\|u_m-u\|_k\xrightarrow{m\to\infty}0$. Здесь также можно считать, что все $C_k=1$, т.е. $\forall u\in E, \|u\|_1\ge\|u\|_2\ge\ldots\ge\|u\|_k\ge\ldots$. Индуктивный предел можно представлять себе как объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$, где банахово пространство B_k построено пополнением пространства B_1 по норме $\|\cdot\|_k$. Индуктивный предел семейства банаховых пространств, вообще говоря, неметризуем. Точно так же, т.е. как объединение, определяется индуктивный предел семейства линейных топологических пространств E_k, вложенных с топологией по расширению: $E_1\subset E_2\subset\ldots$, см. [1,8,9].

5) $C^n[a,b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$ [1] – банахово пространство n раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных или комплексных функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{C^n[a,b]} = \|x\|_{C[a,b]} + \|x'\|_{C[a,b]} + \ldots + \|x^{(n)}\|_{C[a,b]}.$$

6) $C^{\gamma}[a,b]$, $-\infty \le a < b \le \infty, 0 < \gamma \le 1$ [1] – банахово пространство непрерывных по Гёльдеру (т.е. с ограниченной полунормой Гёльдера $|x|_{\gamma}$) на $[a,b]$ вещественных или комплексных функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{C^{\gamma}[a,b]} = \|x\|_{C[a,b]} + |x|_{\gamma},$$

где $|x|_{\gamma,[a,b]} = \sup\limits_{\substack{a \le t \le b \\ a \le \tau \le b}} \dfrac{|x(t) - x(\tau)|}{|t-\tau|^{\gamma}}$ – полунорма Гёльдера с показателем γ. При γ = 0 принимают, что $C^0[a,b] = C[a,b]$. Пространство $C^{\gamma}[a,b]$ с $\gamma = 1$ принято обозначать как $C^{0,1}[a,b]$ и называть пространством функций с выполненным условием Липшица.

7) $C^{m+\gamma}[a,b]$, $-\infty \le a < b \le \infty, 0 < \gamma \le 1$ [1] – банахово пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных или комплексных функций $x(t)$, m-я производная которой непрерывна по Гёльдеру с показателем γ, с нормой

$$\|x\|_{C^{m+\alpha}[a,b]} = \|x\|_{C^m[a,b]} + \left| x^{(m)} \right|_{\alpha},$$

где $\left| x^{(m)} \right|_{\alpha} = \sup\limits_{\substack{a \le t \le b \\ a \le \tau \le b}} \dfrac{|x^{(m)}(t) - x^{(m)}(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}}$ – полунорма Гёльдера m-й производной. Пространство $C^{m+\gamma}[a,b]$ с $\gamma = 1$ принято обозначать как $C^{m,1}[a,b]$.

8) $C^{\infty}(a,b)$, $-\infty \le a \le b \le \infty$ – пространство Фреше бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых на (a,b) вещественных или комплексных функций $x(t)$ со счётным двухпараметрическим набором норм

$$\|x\|_{C^j[c_k,d_k]} \ (j, k = 1,2,\ldots), \text{ где } c_k \to a+0,\ d_k \to b-0.$$

Это пространство можно понимать как проективный предел по j проективного предела по k семейства банаховых пространств $C^j[c_k,d_k]$.

9) $C_0^{\infty}(a,b), -\infty \le a \le b \le \infty$ – линейное подпространство пространства $C^{\infty}(a,b)$, состоящее из функций с компактным носителем, не замкнутое в нём, и потому не полное в индуцированной метрике. Это пространство с топологией Л. Шварца (Schwarz L., 1950) индуктивного предела по k = 1,2,…, $c_k \to a+0, d_k \to b-0$, применённого к проективному пределу по j = 1,2,… пространств $C^j[c_k,d_k]$, является неметризуемым линейным топологическим пространством $D(a,b)$ [2].

---

[1] По аналогии с определением пространства $C(a,b)$, $-\infty \le a \le b \le \infty$ определяются также пространства Фреше $C^m(a,b)$, $C^{\gamma}(a,b)$, $C^{m+\gamma}(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, но они используются редко.

[2] См.[8]. Понятие полноты здесь может быть введено через т.н. равномерную структуру окружений (см. [26]), относительно которой это пространство оказывается полным.

10) $C(M)$, $C(\bar{G})$ – банахово пространство непрерывных на замкнутом множестве M в $\boldsymbol{R}^n$ (например, $M=\bar{G}$, где G – произвольная область в $\boldsymbol{R}^n$) вещественных или комплексных функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{C(M)} = \sup_{x\in M}|u(x)|.$$

11) $C(G)$ – пространство Фреше непрерывных в области, $G\subseteq\boldsymbol{R}^n$ (G – любая область) вещественных или комплексных функций $u(x)$ со счётным набором норм (k = 1,2,…), определённых произвольной последовательностью расширяющихся ограниченных подобластей $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\forall k=1,2,...,\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}\subset G,\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k=G$:

$$\|u\|_k = \|u\|_{C(\bar{G}_k)} = \max_{x\in\bar{G}_k}|u(x)|.$$

12) $C^m(\bar{G})$ – банахово пространство m раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{G}$ вещественных или комплексных функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{C^m(\bar{G})}=\|u\|_{C(\bar{G})}+\sum_{i=1}^{n}\|\partial u/\partial x_i\|_{C(\bar{G})}+...+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|_{C(\bar{G})}.$$

13) $C^{m+\alpha}(\bar{G})$ – банахово пространство m раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{G}$ вещественных или комплексных функций $u(x)$, все m-е производные которой непрерывны по Гёльдеру с показателем γ, с нормой

$$\|u\|_{C^{m+\alpha}(\bar{G})}=\|u\|_{C^m(\bar{G})}+\sum_{|\alpha|=m}\left|D^\alpha u\right|_\gamma,$$

где $\left|D^\alpha u\right|_\gamma = \sup\limits_{x\in G,y\in G}\dfrac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}$ – полунорма Гёльдера m-й производной $D^\alpha u$.

14) $C^{\infty}(G)$ – пространство Фреше бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых в области $G\subseteq\boldsymbol{R}^n$ (G – любая область) вещественных или комплексных функций $u(x)$ со счётным двухпараметрическим набором норм, определённых показателем гладкости j и произвольной последовательностью расширяющихся ограниченных подобластей $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\forall k=1,2,...,\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}\subset G,\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k=G$:

$$\|u\|_{C^j(\Omega_k)}\ (j,k=1,2,\ldots).$$

Это пространство можно понимать как проективный предел по j проективного предела по k семейства банаховых пространств $C^j(\bar{\Omega}_k)$.

15) $C_0^\infty(G)$ – линейное подпространство пространства $C^{\infty}(G)$, состоящее из функций с компактным носителем, не замкнутое в нём, и потому не полное в индуцированной метрике. Это пространство с топологией Л. Шварца (Schwarz L., 1950) индуктивного предела по k = 1,2,…, пространств, определённых произвольной последовательностью расширяющихся ограниченных подобластей $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\forall k=1,2,...,\ \bar{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}\subset G,$

$\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k = G$, применённого к проективному пределу по j = 1,2,… пространств $C^j(\bar{\Omega}_k)$, является неметризуемым полным линейным топологическим пространством $D(G)$ [1].

Лебеговы пространства[2]

16) $L_p[a,b] = L_p(a,b),\ p \ge 1 -$ банахово (гильбертово при p=2) пространство интегрируемых с p-й степенью на [a,b] вещественных или комплексных функций $x(t)$ с нормой

$$\|u\|_{L_p(a,b)} = \|u\|_{p,\,(a,b)} = \left(\int_a^b |\,u(x)\,|^p\ \ dx\right)^{1/p}.$$

17) $L_p(G),\ p \ge 1 -$ банахово пространство (гильбертово при p=2) интегрируемых с p-й степенью в произвольной области G вещественных или комплексных функций $u(x)$ с нормой

$$\|\ u\|_{L_p(G)} = \|\ u\|_{p,\ G} = \left(\int_G |\,u(x)\,|^p\ dx\right)^{1/p}.$$

18) $L_\infty[a,b] = L_\infty(a,b) -$ банахово пространство измеримых на [a,b] ограниченных в существенном вещественных или комплексных функций $x(t)$ с нормой

$$\|u\|_{L_\infty(a,b)} = \|u\|_{\infty,(a,b)} = \operatorname*{supess}_{a<t<b} |\,x(t)\,|.$$

19) $L_\infty(G) -$ банахово пространство ограниченных в существенном измеримых в произвольной области G вещественных или комплексных функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{L_\infty(G)} = \|u\|_{\infty,G} = \operatorname*{supess}_{x\in G} |\,u(x)\,|.$$

Пространства аналитических функций[3]

20) $H(O)$ – пространство аналитических в области функций с топологией равномерной сходимости на замкнутых множествах. Пространство Фреше аналитических в области O расширенной комплексной плоскости $\boldsymbol{C}^*$ функций $u(x)$ со счётным набором норм (k = 1,2,…), определённых произвольной последовательностью расширяющихся замкнутых подобластей $\Omega_k \subset O,\ k = 1,2,...$со свойствами $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}, \forall k = 1,2,...$ $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k = O$,

$$\|u\|_k = \max_{z\,\in\,\Omega_k} |\,u(z)\,|.$$

Если в области O комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$ замкнутые подобласти $\Omega_k \subset O,\ k = 1,2,...$выбираются компактными, то пространство $H(O)$ называется пространством аналитических в области функций с топологией равномерной сходимости на компактах.

---

[1] См. сноску к п. 9.
[2] См., напр. [1].
[3] см. [27],[28].

21) H^p, $1 \le p < \infty$ – пространство Харди. Банахово пространство аналитических в еди-ничном круге *D* функций, для которых конечна *p*-я степень нормы

$$\|u\|_p^p = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| u\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta .$$

В случае *p*=∞ H^∞ – пространство ограниченных аналитических в круге *D* функций с нормой

$$\|u\|_\infty = \sup_{z \in D} | u(z) | .$$

Обобщённые производные и следы[1]

Обобщённой производной *du/dx* (или соболевской обобщённой производной[2]) локально интегрируемой на интервале $-\infty \le a \le b \le \infty$ функции *u*(*x*) (т.е. интегрируемой по Лебегу на любом интервале $(c,d): a < c < d < b$) называется такая локально интегрируемая на интервале $-\infty \le a \le b \le \infty$ функция *w*(*x*), что для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ (т.е. бесконечно дифференцируемой и финитной) выполнено равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\varphi(x) dx .$$

Обобщённой производной $\dfrac{d^k u}{dx^k}$ (или *k*-й соболевской обобщённой производной) локально интегрируемой на интервале $-\infty \le a \le b \le \infty$ функции *u*(*x*) называется такая локально интегрируемая на интервале $-\infty \le a \le b \le \infty$ функция *w*(*x*), что для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ выполнено равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \frac{d^k\varphi}{dx^k} dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\varphi(x) dx .$$

Обобщённой производной $\partial u / \partial x_j$ (или соболевской обобщённой производной) локально интегрируемой в произвольной области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ функции *u*(*x*) (т.е. интегрируемой по Лебегу в любой компактной подобласти $\bar{\Omega} \subseteq G$) называется такая локально интегрируемая в области *G* функция *w*(*x*), что для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$ (т.е. бесконечно дифференцируемой и финитной) выполнено равенство:

$$\int_G u(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx = -\int_G w(x)\varphi(x) dx .$$

Обобщённой производной $\partial^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, | \alpha | = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ (или соболевс-кой обобщённой производной) локально интегрируемой в произвольной области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$

[1] см., напр. [15], [21], [23].

[2] Введено в работах: С.Л.Соболев, Докл. АН СССР, 1935, т.8, с.291-294; С.Л.Соболев, Матем. сб., 1936, т.1, с.30-72. Понятие обобщённой производной вводилось и ранее (напр. Levi B., Rend. Circolo mat. Palermo, 1906, v.22,p.293-359, где рассматривались обобщённые производные с интегрируемым квадратом), и в дальнейшем многие исследователи приходили к этому понятию независимо от своих предшественников, см.,например, [23].

функции $u(x)$ называется такая локально интегрируемая в области G функция $w(x)$, что для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$ выполнено равенство:

$$\int_G u(x)\partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G w(x)\varphi(x)dx .$$

Говорят, что **функция** u, заданная в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, **имеет L_p-след на подпространстве** $\boldsymbol{R}^m = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid x_{m+1} = ... = x_n = 0\}$, если функцию u можно изменить на множестве n-мерной меры нуль так, чтобы для изменённой функции, которую снова обозначим через u, имело место

$$\left\| u(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n) - u(x_1,...,x_m,0,...,0) \right\|_{L_p(\boldsymbol{R}^m)} \xrightarrow{x_j \to 0, \quad j=m+1,...,n} 0 .$$

Следом $u|_{\boldsymbol{R}^m}$ (или L_p-следом) такой функции u на подпространстве $\boldsymbol{R}^m$, называется функция $u(x_1,...,x_m,0,...,0)$.

Говорят, что **функция** u, заданная в области $G \subset \boldsymbol{R}^n$, имеет L_p-след на гладком подмногообразии[1] $\Gamma \subset G$ размерности m, если у каждой точки $x \in \Gamma$ существует окрестность U и диффеоморфизм h из U на всё $\boldsymbol{R}^n, h(\Gamma \cap U) = \boldsymbol{R}^m$, такие, что функция $u \circ h^{-1}$, заданная на $\boldsymbol{R}^n$, имеет L_p-след на подпространстве $\boldsymbol{R}^m$ в смысле предыдущего определения. **Следом** $u|_{\Gamma \cap U}$ (или L_p-следом) такой функции u на подмногообразии Γ в окрестности U, называется функция $((u \circ h^{-1})|_{\boldsymbol{R}^m}) \circ h$, заданная на $\Gamma \cap U$.

Говорят, что **функция** u, заданная в полупространстве $\boldsymbol{R}_+^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n > 0\}$, **имеет L_p-след** $u(x_1,...,x_{n-1},0)$ **на подпространстве** $\boldsymbol{R}^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n = 0\}$, если функцию u можно изменить на множестве n-мерной меры нуль так, чтобы для изменённой функции, которую снова обозначим через u, имело место

$$\left\| u(x_1,...,x_n) - u(x_1,...,x_{n-1},0) \right\|_{L_p(\boldsymbol{R}^{n-1})} \xrightarrow{x_n \to +0} 0 .$$

Говорят, что **функция** u, заданная в области $G \subset \boldsymbol{R}^n$ с гладкой границей $\partial G = \bar{G} \setminus G$, **имеет L_p-след на** ∂G, если для каждой точки $x \in \partial G$ существует окрестность $U \subset G$ и диффеоморфизм $h: U \to \boldsymbol{R}^n, h(G \cap U) = \boldsymbol{R}_+^n, h(\partial G \cap U) = \boldsymbol{R}^{n-1}$, такие, что функция $u \circ h^{-1}$, заданная

[1] **Топологическим многообразием** M размерности m называется топологическое пространство, которое хаусдорфово (т.е. у каждой пары различных точек существуют непересекающиеся окрестности), сепарабельное (т.е. со счётной базой топологии) и локально евклидово (т.е. у каждой точки существует окрестность U и гомеоморфизм h:$U \to D$ на некоторую область D из $\boldsymbol{R}^m$). Пара U и h:$U \to D$ называется **картой**. Две карты (U,h) и (V,g) называются гладко согласованными, если либо $U \cap V = \varnothing$, либо если гомеоморфизм $g \circ h^{-1}|_{h(U \cap V)}: h(U \cap V) \to g(U \cap V)$ является диффеоморфизмом (т.е. бесконечно дифференцируемым отображением областей в $\boldsymbol{R}^m$, обратное отображение к которому тоже бесконечно дифференцируемо). Атлас – это такой набор (U_j,h_j) гладко согласованных карт, что $\bigcup_j U_j = M$. Топологическое многообразие с заданным атласом называется **гладким многообразием**. Гладким многообразием, в частности, является множество M решений системы уравнений $f_1(x_1,...,x_n) = 0,..., f_k(x_1,...,x_n) = 0$ с гладкими (C^∞) функциями $f_1,..., f_k$ от n переменных, если выполнено свойство: ранг матрицы Якоби $\left(\partial f_i(x) / \partial x_j\right)$ постоянен и равен m для всякого решения $x = (x_1,...,x_n)$ системы. Такое многообразие называют подмногообразием в $\boldsymbol{R}^n$. Справедливо и обратное утверждение Уитни (Whitney H., 1936): каждое гладкое многообразие размерности m может быть вложено в $\boldsymbol{R}^{2m+1}$, т.е. может быть с точностью до диффеоморфизма многообразий представлено как решение системы уравнений с гладкими функциями от $2m$+1 переменной с матрицей Якоби ранга m (см., напр., [16]).

на $\boldsymbol{R}^n_+$, имеет L_p-след на подпространстве $\boldsymbol{R}^{n-1}$в смысле предыдущего определения. **Следом** $u|_{\Gamma\cap U}$ такой функции u на подмногообразии Γ в окрестности U, называется функция $((u\circ h^{-1})|_{\boldsymbol{R}^m})\circ h$, заданная на $\Gamma\cap U$.

Пространства обобщённо дифференцируемых функций (см. [21], [22], [23], [15],[18], [29])

22) $W^1_p(a,b),\ p\ge 1-$ соболевское пространство. Банахово пространство интегрируемых с p-й степенью на (a,b) вещественных или комплексных функций $u(x)$, имеющих соболевскую обобщённую производную du/dx, интегрируемую с p-й степенью на (a,b), со следующей p-й степенью нормы

$$\|u\|^p_{W^1_p(a,b)}=\|u\|^p_{L_p(a,b)}+\|du/dx\|^p_{L_p(a,b)}.$$

23) $\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b),\ 1\le p\le\infty-$ замкнутое подпространство соболевского пространства $W^1_p(a,b)$, состоящее из тех $u\in W^1_p(a,b)$, для которых $u(a)=u(b)=0$. Заметим, что для p>1 по теореме вложения $W^1_p(a,b)\subset C[a,b]$, поэтому каждая функция $u\in W^1_p(a,b)$ имеет следы $u(a),u(b)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b),\ m\in\boldsymbol{N}$ определяется как замыкание в $W^1_p(a,b)$ (или, что эквивалентно, пополнение) пространства $C^\infty_0(a,b)$.

24) $W^m_p(a,b),\ m\in\boldsymbol{N},\ p\ge 1-$ банахово пространство интегрируемых с p-й степенью на (a,b) вещественных или комплексных функций $u(x)$, имеющих соболевские обобщённые производные du/dx ,…, $\dfrac{d^m u}{dx^m}$, интегрируемые с p-й степенью на [a,b], со следующей p-й степенью нормы

$$\|u\|^p_{W^k_p(a,b)}=\|u\|^p_{L_p(a,b)}+\|du/dx\|^p_{L_p(a,b)}+\ldots+\left\|\frac{d^m u}{dx^m}\right\|^p_{L_p(a,b)}.$$

Введено С.Л. Соболевым.[1]

25) $\overset{\circ}{W}{}^m_p(a,b),\ m\in\boldsymbol{N},1\le p\le\infty$ − замкнутое подпространство соболевского пространства $W^m_p(a,b)$, состоящее из тех $u\in W^m_p(a,b)$, для которых

$$u(a)=u'(a)=\ldots=u^{(m-1)}(a)=0,\ u(b)=u'(b)=\ldots=u^{(m-1)}(b)=0.$$ [2]

Пространство $\overset{\circ}{W}{}^m_p(a,b),\ m\in\boldsymbol{N}$ определяется как замыкание в $W^m_p(a,b)$ пространства $C^\infty_0(a,b)$.

26) $W^1_p(G),\ p\ge 1-$ соболевское пространство. Банахово пространство интегрируемых с p-й степенью в произвольной области G вещественных или комплексных функций

---

[1] См. сноску [2] на стр.18.

[2] Заметим, что для p>1 по теореме вложения $W^m_p(a,b)\subset C^{m-1}[a,b]$, поэтому каждая функция $u\in W^m_p(a,b)$ имеет следы $u(a),\ldots,\ u^{(m-1)}(a)$, $u(b),\ldots,\ u^{(m-1)}(b)$.

$u(x)$, имеющих соболевские обобщённые производные $\partial u/\partial x_j$, $j = 1,\dots, n$, интегрируемые с p-й степенью в G, со следующей p-й степенью нормы

$$\| u\|^p_{W^1_p(G)} = \| u\|^p_{L_p(G)} + \sum\nolimits_{j=1}^n \| \partial u / \partial x_j \|^p_{L_p(G)} .$$

Введено С.Л. Соболевым.[1]

27) $\overset{\circ}{W}{}^1_p(G),\ 1 < p \le \infty -$ замкнутое подпространство соболевского пространства $W^1_p(G)$, состоящее из тех $u \in W^1_p(G)$, для которых $u|_{\partial G} = 0$ [1].

28) $W^m_p(G),\ m \in \boldsymbol{N},\ p \ge 1 -$ соболевское пространство. Банахово пространство интегрируемых с p-й степенью в произвольной области G вещественных или комплексных функций $u(x)$, имеющих соболевские обобщённые производные $\partial^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, для всех α, $|\alpha| = 1,\dots, m$, интегрируемые с p-й степенью на G, со следующей p-й степенью нормы

$$\| u\|^p_{W^m_p(G)} = \| u\|^p_{L_p(G)} + \sum\nolimits_{j=1}^n \| \partial u / \partial x_j \|^p_{L_p(G)} + \dots + \sum\nolimits_{|\alpha| \le m} \| \partial^\alpha u\|^p_{L_p(G)} .$$

Введено С.Л. Соболевым.[2]

29) $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G),\ m \in \boldsymbol{N}, 1 < p \le \infty -$ замкнутое подпространство соболевского пространства $W^m_p(G)$, состоящее в случае области с гладкой границей из тех $u \in W^m_p(G)$, для которых $u|_{\partial G} = 0, \nabla u|_{\partial G} = 0, \dots,\ \partial^\alpha u|_{\partial G} = 0, |\alpha| \le m-1$. Для произвольной области G пространство $\overset{\circ}{W}{}^m_p(G)$ определяется как замыкание в этой норме пространства $C_0^\infty(G)$.

30) $W^m_p(G),\ m \in \boldsymbol{R}$ (с нецелым m), $p \ge 1 -$ пространство Соболева-Слободецкого (также часто называемое соболевским пространством). Для $m > 0$ это – банахово пространство интегрируемых с p-й степенью в произвольной области G вещественных или комплексных функций, имеющих соболевские обобщённые производные $\partial^\alpha u$ для всех α, $|\alpha| = 1,\dots, m$, интегрируемые с p-й степенью в G, со следующей p-й степенью нормы

$$\| u\|^p_{W^m_p(G)} = \| u\|^p_{W^{[m]}_p(G)} + \int\limits_G \int\limits_G \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+\{m\}p}} dxdy ,$$

где $[m], \{m\}$ – целая и дробная части числа m. Для $m = 0$ это – пространство $L_p(G)$.

При $m < 0, p \ne 2$ по определению полагают $W^m_p(G) = \left(W_q^{-m}(G)\right)'$, (1/$p$+1/$q$=1) – сопряжённое пространство. При $m < 0, p = 2$ принимают, что $W^m_2(G) = \left(W_2^{-m}(G)\right)'$ – сопряжённое оснащённое пространство[3]. Заметим, что иногда при $m < 0$ принимают, что

---

[1] Заметим, что по теореме вложения оператор взятия следа $T : u \to u|_{\partial G}$ непрерывно действует в пространствах $W^1_p(G) \xrightarrow{T} L_q(\partial G)$ для любых $q \ge 1$ при $p \ge n$ и для $1 \le q < np/(n-p)$ при $p < n$, поэтому каждая функция $u \in W^1_p(G)$ имеет след $u|_{\partial G} \in L_q(\partial G)$.

[2] См. сноску [2] на стр.18.

[3] Если $H_+ \subset H_0 -$ плотное вложение гильбертовых пространств с топологией (т.е. $\|u\|_0 \le C\|u\|_+$), то, вводя норму $\|u\|_- = \sup\limits_{v \in H_+ \backslash 0} \dfrac{(u,v)_0}{\|v\|_+}$ и проводя пополнение пространства H_+ по этой норме, получим

$W_p^m(G) = \left(\overset{\circ}{W}{}_q^{-m}(G)\right)'$, (1/$p$+1/$q$=1), ограничиваясь рассмотрением обобщённых функций с носителями в G, а не в $\bar{G}$, как в случае $W_2^m(G) = \left(W_2^{-m}(G)\right)'$.

31) $\overset{\circ}{W}{}_p^m(G),\ m \in \boldsymbol{R}_+, 1 < p \le \infty -$замкнутое подпространство соболевского пространства $W_p^m(G)$, получаемое замыканием в этой норме пространства $C_0^\infty(G)$ и состоящее в случае области с гладкой границей из тех $u \in W_p^m(G)$, для которых $u|_{\partial G} = 0, \nabla u|_{\partial G} = 0, \ldots,\quad \partial^\alpha u|_{\partial G} = 0, |\alpha| \le m-1$ при $\{m\}$<1/p и для которых $u|_{\partial G} = 0, \nabla u|_{\partial G} = 0, \ldots,\quad \partial^\alpha u|_{\partial G} = 0, |\alpha| \le m$ при $\{m\}$≥1/p. Для произвольной области G пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$ определяется как пополнение в этой норме пространства $C_0^\infty(G)$.

32) $B_p^m(G),\ m \in \boldsymbol{N},\ p > 1-$ пространство Бесова. Банахово пространство тех функций из $W_p^{m-1}(G)$, для которых конечна следующая p-я степень нормы

$$\|u\|_{B_p^m(G)}^p = \|u\|_{W_p^{m-1}(G)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_G \int_G \frac{\left|D^\alpha u(x) - 2D^\alpha u((x+y)/2) + D^\alpha u(y)\right|^p}{|x-y|^{n+p}} dx\, dy .$$

При нецелых m > 0, а также при p = 2 пространство Бесова совпадает с пространством Соболева-Слободецкого: $B_p^m(G) = W_p^m(G)$. При m < 0 полагают $B_p^m(G) = \left(B_q^{-m}(G)\right)'$ (1/p+1/q=1). При m = 0 пространство Бесова $B_p^0(G)$ не совпадает с пространством $L_p(G)$ и определяется через интерполяцию (см. [23]).

33) $W_p^m(\partial G), W_p^m(S),\ m \in \boldsymbol{R}$ (с целым и нецелым m), $p \ge 1-$ пространства Соболева и Соболева-Слободецкого, $B_p^m(\partial G), B_p^m(S),\ m \in \boldsymbol{N},\ p > 1-$ пространство Бесова функций, заданных на гладкой границе области ∂G или на гладком подмногообразии[1] S. Определение – такое же, как и для случая области, с тем изменением, что интегралы по ∂G или по S понимаются как интегралы по гладкому многообразию (см. [19]).

III. НЕРАВЕНСТВА С НОРМАМИ И ВЛОЖЕНИЯ

1. **Неравенство Пуанкаре** (для случая квадрата доказано Пуанкаре, H. Poincare, 1894, для более общего случая см. [14]):
для произвольной односвязной[2] области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ и любой функции $u \in W_2^1(G)$ выполнено неравенство[1]

пространство $H_- \supset H_0$, являющееся гильбертовым и называемое сопряжённым пространством к пространству H_+ в смысле топологии H_0 или оснащённым сопряжённым пространством (см.[10],[11]).

[1] См. сноску на стр. 19.
[2] Область G называется **односвязной**, если каждая петля стягиваема в точку; точнее, если каждый непрерывный замкнутый путь в ней, т.е. непрерывное отображение $\gamma_0 : [0,1] \to G$ со свойством

$$\int_G u^2 dx \le C\left[\left(\int_G u\,dx\right)^2 + \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]$$

или $$\|u\|^2_{L_2(G)} \le C\left[\left(\int_G u\,dx\right)^2 + \|\nabla u\|^2_{L_2(G)}\right]$$

2. **Неравенство Фридрихса** (K.Friedrichs, 1927, см.[18, т.5, к.666]):
в ограниченной области $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$ выполнено неравенство:

$$\int_\Omega u^2 dx \le C\left[\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} u^2 dx\right] \quad \text{или} \quad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le C\left[\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right],$$

в частности, для $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_\Omega u^2 dx \le C\left[\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right]$$

или $$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \text{где } C = (\operatorname{diam}\Omega)^2;\ \operatorname{diam}\Omega = \sup_{x,y\in\Omega}|x-y|.$$

Последнее неравенство справедливо также в произвольной области, лежащей в слое $-\infty < a < x_n < b < \infty$.

3. **Неравенства Соболева и Гальярдо** (см.[17]):
При $1 \le p < n$ для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ выполнены неравенство Соболева (p > 1) и Гальярдо (p = 1):

$$\|u\|^2_{L_r(\Omega)} \le C\|\nabla u\|^2_{L_p(\Omega)},$$

где $r = \dfrac{np}{n-p}$, $C = \pi^{-1/2} n^{-1/p}\left(\dfrac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\dfrac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{\frac{1}{n}}$ – точная константа.

4. **Интерполяционное неравенство** (см. [19]):

Для лебеговых норм в ограниченной области с $p \ge 1, m \ge 1$, $1/p+1/q=1$

$$\|u\|_{L_m(\Omega)} \le \|u\|^{\frac{\alpha}{m}}_{L_{\alpha p}(\Omega)}\ \|u\|^{1-\frac{\alpha}{m}}_{L_{(m-\alpha)q}(\Omega)}, \quad 0 < \alpha < m$$

$\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$, гомотопен (два пути γ_0 и γ_1 называются гомотопными, если существует непрерывное отображение $\Gamma : [0,1]\times[0,1] \to G$ такое, что $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t), \Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$) постоянному пути, т.е. $\exists x_0 \in G, \forall t \in [0,1], \gamma_1(t) = x_0$. Односвязность области *G* эквивалентна тому, что фундаментальная (т.е. первая гомотопическая) группа $\pi_1(G)$ тривиальна (см. [16]).

[1] Неравенство Пуанкаре в области *G* выполнено тогда и только тогда, когда образ оператора $\nabla : W_2^1(G) \to [L_2(G)]^n$ – замкнут. В частности, это так в любой ограниченной области с гладкой границей.

5. **Неравенство вложения для лебеговых пространств** (см. [19]):
в ограниченной области для $p \ge m \ge 1$ имеет место непрерывное вложение[1] $L_p(\Omega) \subset L_m(\Omega)$:

$$\| u\|_{L_m(\Omega)} \le (\text{mes}\ \ \Omega)^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}} \| u\|_{L_p(\Omega)}\ .$$

6. **Неравенства вложения соболевских пространств над областью** (см. [15], [21], [22], [23], [29]):
Для соболевских пространств функций в ограниченной области $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ с условием конуса[2] имеют место непрерывные вложения:

$$W_p^m(\Omega) \subseteq W_r^l(\Omega),\, m \in \boldsymbol{R},\ r \in \boldsymbol{R},\ p \ge 1, r \ge 1, \text{ т.е.}$$

$$\exists C > 0, \forall u \in W_p^m(\Omega), \| u\|_{W_r^l(\Omega)} \le C \| u\|_{W_p^m(\Omega)},$$

если $m \ge l$ и $m - \dfrac{n}{p} \ge l - \dfrac{n}{r}$. При этом вложение – компактно[3], если $m - \dfrac{n}{p} > l - \dfrac{n}{r}$ (и $m \ge l$). Число $-(m - n/p)$ иногда называют размерностью нормы $\| u\|_{W_p^m(\Omega)}$.

В случае неограниченной области дополнительно накладывается условие $1 < p < r < \infty$.

7. **Неравенства вложения соболевских пространств в классические** (см. [15], [21], [22], [23], [29]):

Для соболевских пространств функций в общей ограниченной области $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ с условием конуса[1] имеют место вложения:

$$W_p^m(\Omega) \subseteq C^{l+\gamma}(\bar{\Omega}),\, m \in \boldsymbol{R}_+,\ l \in \boldsymbol{N}, 0 \le \gamma \le 1,\ p \ge 1, \text{ т.е.}$$

$$\exists C > 0, \forall u \in W_p^m(\Omega), \| u\|_{C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})} \le C \| u\|_{W_p^m(\Omega)},$$

---

[1] Напомним, что линейный оператор в банаховых пространствах $L: B_1 \to B_2$ непрерывен тогда и только тогда, когда он – ограничен (т.е. $\exists C > 0, \forall u \in B_1,\ \|Lu\|_2 \le C\|u\|_1$).

[2] Область G удовлетворяет **условию конуса**, если её граница локально липшицева, т.е. для каждой точки $x \in \partial G$ в некоторой её окрестности U существует такая система координат (т.е. диффеоморфизм из открытого n-мерного единичного шара на U), что область задаётся неравенством $x_n < \varphi(x_1, ..., x_{n-1})$ с функцией φ, удовлетворяющей в (n-1)-мерном единичном шаре условию Липшица: $\exists C > 0, | \varphi(y_1, ..., y_{n-1}) - \varphi(z_1, ..., z_{n-1}) | \le C \mid y - z \mid$ (Другая формулировка: если каждой точки границы можно коснуться вершиной кругового конуса с ненулевым углом, не задевая других точек). Для ограниченной области это эквивалентно тому, что область является объединением конечного числа областей, звёздных относительно шара (область звёздна относительно шара, если она звёздна относительно каждой точки некоторого шара; наконец, область звёздна относительно точки, если отрезок, соединяющий некоторую фиксированную точку с произвольной точкой границы, лежит в этой области). Условие конуса введено С.Л. Соболевым (см. [21], [17]).

[3] Линейный оператор в банаховых пространствах $L: B_1 \to B_2$ называется **вполне непрерывным** или **компактным**, если образ каждого ограниченного в B_1 множества (т.е. лежащего в некотором шаре) является предкомпактным в B_2 (т.е. его замыкание – компактно). Т.о., вложение банаховых пространств $B_1 \subset B_2$ называется **компактным**, если каждое ограниченное в B_1 множество является предкомпактным в B_2. В сепарабельных пространствах это эквивалентно тому, что каждая слабо сходящаяся последовательность в B_1 (т.е. $\forall f \in B_1^*, < f, u_k - u > \xrightarrow{k \to \infty} 0$) является сильно сходящейся в B_2 (т.е. $\|u_k - u\|_{B_2} \xrightarrow{k \to \infty} 0$) (см. [1], [22]).

если $m > l$ и $m - \dfrac{n}{p} > l + \alpha$. При этом вложение – компактно[1].

Отметим, что при $mp = n$ вложение $W_p^m(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega})$ имеет место только при $n = 1$ (см. [29]).

8. **Ограниченность операторов следа (Неравенства вложения соболевских пространств с потерей измерений)** (см. [15], [21], [22], [23], [29]):

Пусть S – гладкое подмногообразие[2] размерности s в области $G \subseteq \mathbf{R}^n$ с условием конуса.[3] Тогда

8-1) (основная теорема С.Л. Соболева с дополнениями В.И. Кондрашова и В.П. Ильина) для $1 \le s \le n,\ 1 < p < r < \infty,\ 0 \le k = m - n/p + s/r$ имеет место ограниченность оператора следа $T : W_p^m(G) \to W_r^{[k]}(S)$, где $[k]$ – целая часть k, т.е.

$$\exists C > 0, \forall u \in W_p^m(G), \|Tu\|_{W_r^{[k]}(S)} \le C\|u\|_{W_p^m(G)}.$$

8-2) для $1 < p < \infty$ имеет место ограниченность оператора следа $T : W_p^m(G) \to B_p^{m - \frac{n-s}{p}}(S)$, т.е.

$$\exists C > 0, \forall u \in W_p^m(G), \|Tu\|_{B_p^{m-\frac{n-s}{p}}(S)} \le C\|u\|_{W_p^m(G)}.$$

Допуская некоторую вольность речи, часто в этом случае говорят, что имеет место ограниченное вложение

$$W_p^m(G) \subset B_p^{m-\frac{n-s}{p}}(S).$$

Важно отметить, что у оператора T существует ограниченный правый обратный оператор продолжения $R : B_p^{m-\frac{n-s}{p}}(S) \to W_p^m(G), \quad TR = \mathrm{id}_{B_p^{m-\frac{n-s}{p}}(S)}$, id – тождественный оператор ([23], [18]).

Учитывая вложения пространств из пп. 6 и 9, имеем ограниченность (и, более того, компактность для ограниченной области) оператора следа $T : W_p^m(G) \to W_r^l(S)$ при условиях: $m \ge l$, $m - \dfrac{n}{p} > l - \dfrac{s}{r}$.

Для случая, когда $S = \partial G$ справедливы те же утверждения, т.е. ограниченность оператора следа $T : W_p^m(G) \to B_p^{m-1/p}(\partial G)$ и существование ограниченного правого обратного оператора продолжения $R : B_p^{m-1/p}(\partial G) \to W_p^m(G)$.

[1] Заметим, что для $l \in N,\ 0 < \gamma \le 1$ пространство $C^{l+\gamma}(\bar{\Omega})$ – несепарабельно ([22]).

[2] См. сноску на стр. 19.

[3] Для случая n=s. См. сноску на стр. 24.

9. **Ограниченность вложения пространств Бесова и соболевских пространств** ([23], [22]):

9-1). Для любого m и $1 < p \le 2$, для каждого ε > 0 имеют место ограниченные вложения

$$W_p^{m-\varepsilon}(G) \subset B_p^m(G) \subset W_p^m(G).$$

9-2). Для любого m и $p \ge 2$, для каждого ε > 0 имеют место ограниченные вложения

$$W_p^m(G) \subset B_p^m(G) \subset W_p^{m+\varepsilon}(G).$$

10. **Мультипликативное неравенство** ([25]):

для любых $m \ge 1$, $r \ge 1$ и любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ в ограниченной области выполнено

$$\|u\|_{p,\Omega} \le \beta \|\nabla u\|_{m,\Omega}^{\alpha} \|u\|_{r,\Omega}^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\overline{p}}\right)^{-1}$, $\overline{m} = \frac{nm}{n-m}$ и

при $m < n$ число p – любое из $[r, \overline{m}]$, если $r \le \overline{m}$, (при этом $\alpha \in [0,1]$)

и число p – любое из $[\overline{m}, r]$, если $r \ge \overline{m}$, при этом $\beta = \left((n-1)\overline{m}/n\right)^{\alpha}$,

при $r = p = \overline{m}$ в качестве α можно взять любое число из [0,1].

при $m \ge n$ число p – любое из $[r, \infty)$, при этом $\beta = \max\left((n-1)p/n; 1 + (m-1)r/m\right)^{\alpha}$.

11. **Неравенство Ниренберга–Гальярдо** (L.Nirenberg,1959; E.Gagliardo,1959)[17, с.67]:

Пусть при σ>0 $\langle u \rangle_\sigma = \left(\int_\Omega |u|^\sigma \, dx\right)^{1/\sigma}$, где Ω – ограниченная область с условием конуса. Тогда

$$\langle \nabla_j u \rangle_q \le c\left(\langle \nabla_l u \rangle_p + \langle u \rangle_r\right)^\tau \langle u \rangle_r^{1-\tau},$$

где $p \ge 1$, $1/q = j/n + \tau(1/p - l/n) + (1-\tau)/r$ для всех $\tau \in [j/l, 1]$, за исключением случая, когда $1<p<\infty$ и $l - j - (1-\tau)/r$ – неотрицательное целое число. В этом последнем случае то же неравенство имеет место для $\tau \in [j/l, 1)$.

12. **Неравенство Бора–Фавара** (H.Bohr,1935; J.Favard,1937) [12]:

для любых натуральных чисел r и n и для любой периодической функции $f(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ с непрерывной производной $f^{(r)}(x)$ выполнено неравенство

$$\|f\|_C \le K(n,r) \|f^{(r)}\|_C.$$

13. **Неравенство Колмогорова** [18]:

для $J = (0,\infty)$ и для $J = (-\infty,\infty)$, для любых натуральных n, целых $k : 0 \le k < n$, для любых вещественных $p : 1 \le p \le \infty$, $q : 1 \le q \le \infty$, $s : 1 \le s \le \infty$, существует $C > 0$ такая, что для любых $u \in C^n(J)$ при $\nu = \dfrac{n - k - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{n - \frac{1}{p} + \frac{1}{s}}$ выполнено неравенство:

$$\| u^{(k)} \|_{L_q(J)} \le C \| u \|^{\nu}_{L_s(J)} \| u^{(n)} \|^{1-\nu}_{L_p(J)} .$$

Такие неравенства изучали Г.Харди (G.Hardy, 1912), Дж.Литлвуд (J.Littlewood, 1912), Э.Ландау (E.Landau, 1913), Ж.Адамар (J.Hadamart, 1914). А.Н. Колмогоров (1939) нашёл наименьшую константу C_0 для наиболее важного случая $J = (-\infty,\infty)$, $p = q = s = \infty$ и любых k и n:

$$\| u^{(k)} \|_{C(J)} \le C_0 \| u \|^{\nu}_{C(J)} \| u^{(n)} \|^{1-\nu}_{C(J)}, \ \nu = \frac{n-k}{n}.$$

14. **Неравенство Эрлинга-Ниренберга** (см., напр. [29]):

При $u \in W_p^s(G)$, $0 \le k \le l < s, 1 \le p$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $u \in W_p^s(G)$

$$\| u \|_{W_p^l(G)} \le \varepsilon \| u \|_{W_p^s(G)} + C(\varepsilon) \| u \|_{W_p^k(G)},$$

например, на отрезке (a,b) имеем:

$$\| u' \|_{L_p(a,b)} \le \varepsilon \| u'' \|_{L_p(a,b)} + C(\varepsilon) \| u \|_{L_p(a,b)} .$$

15. **Неравенство Хёрмандера** (L.Hörmander, 1955, см. [31]):

В ограниченной области $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ для произвольного скалярного дифференциального оператора с постоянными комплексными коэффициентами существует $C > 0$, что выполнено неравенство

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \| \varphi \|_{L_2(\Omega)} \le C \| L\varphi \|_{L_2(\Omega)} .$$

Ограниченность линейных операторов

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\overline{\Omega}$ – замкнутая ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$, $K(x,y)$ ($x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$) – измеримая по совокупности переменных функция. **Линейным интегральным оператором** с ядром $K(x,y)$ в области $\overline{\Omega}$ называется оператор вида

$$(Au)(x) = \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, dy .$$

Интегральным оператором с особенностью называется линейный интегральный оператор вида

$$(Au)(x) = \int_G \frac{K(x,y)}{| x - y |^\lambda} u(y)\, dy .$$

Интегральным оператором со слабой особенностью (или **оператором типа потенциала**) называется интегральный оператор с особенностью *A*, где $0 < \lambda < n$, а функция $K(x,y)$ – ограничена. **Сингулярным интегральным оператором** называется интегральный оператор с особенностью *A* с $\lambda = n$ и функцией $K(x,y) = s(x,x-y)$, где функция $s(x,\tau)$ – однородная функция по τ нулевой степени и интеграл $\int_{|\tau|=1} s(x,\tau)d\tau$ по единичной сфере равен нулю для любого x.

1. **Ограниченность линейного интегрального оператора** (см. [1], [32]):

1-1). Оператор *A* ограничен в $L_2(\Omega)$, т.е. выполнено неравенство

$$\exists C > 0, \forall u \in L_2(\Omega), \| Au\|_{L_2(\Omega)} \le C\| u\|_{L_2(\Omega)}$$

тогда и только тогда, когда $\|A\|^2 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} | K(x,y)|^2\, dx\, dy < \infty.$ При этом он – вполне непрерывен.

1-2). Если оператор *A* действует из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, $p \ge 1, q \ge 1$, то он – ограничен, т.е. выполнено неравенство

$$\exists C > 0, \forall u \in L_p(\Omega), \| Au\|_{L_q(\Omega)} \le C\| u\|_{L_p(\Omega)}.$$

1-3). Оператор *A* ограничен в $C(\bar{\Omega})$, т.е. выполнено неравенство

$$\exists C > 0, \forall u \in C(\bar{\Omega}), \| Au\|_{C(\bar{\Omega})} \le C\| u\|_{C(\bar{\Omega})}$$

тогда и только тогда, когда $K(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$. При этом он – вполне непрерывен.

1-4). Если оператор *A* действует из $L_p(\Omega)$ в $C(\Omega)$, то он – ограничен. Если при этом $K(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$, то он – вполне непрерывен.

2. **Ограниченность интегрального оператора со слабой особенностью** (см. [15], [32]):

2-1). Если $1 < p \le \infty$ и $\lambda q < n$, $1/p+1/q=1$ и если $K(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$, то интегральный оператор со слабой особенностью ограничен как действующий из $L_p(\Omega)$ в $C(\Omega)$, т.е. выполнено неравенство

$$\exists C > 0, \forall u \in L_p(\Omega), \| Au\|_{L_q(\Omega)} \le C\| u\|_{L_p(\Omega)}.$$

При этом он – вполне непрерывен.

2-2). В этих же условиях этот оператор вполне непрерывен как действующий из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$.

2-3). Если $1 < p \le \infty$ и $\lambda q \ge n$, $1/p+1/q=1$, то интегральный оператор со слабой особенностью ограничен как действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_r(\Omega)$, где $1 \le r \le r_0 = \dfrac{np}{n-(n-\lambda)p}$. При $r < r_0$ он – вполне непрерывен.

3. **Ограниченность сингулярного интегрального оператора** (см. [15], [32]):

Если интеграл $\int_{|\tau|=1} | s(x,\tau)|^q\, d\tau$ равномерно ограничен по *x*, то сингулярный интегральный оператор *A* ограниченно действует из $L_p(\mathbf{R}^n)$ в $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $1/p+1/q=1$, т.е. выполнено неравенство (теорема Кальдерона – Зигмунда)

$$\exists C > 0, \forall u \in L_p(\Omega), \| Au\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le C \| u\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}.$$

3. **Ограниченность дифференциальных операторов** (см. [23], [18], [22]):

Операторы дифференцирования $\partial_i = \partial/\partial x_i$ (и поэтому любые линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в соответствующих пространствах) являются ограниченными операторами во всех пространствах Соболева-Слободецкого $\partial_i : W_p^m(G) \to W_p^{m-1}(G)$ и Бесова $\partial_i : B_p^m(G) \to B_p^{m-1}(G)$, кроме случая $m = 1/p$. Если $G = \mathbf{R}^n$, то последнее ограничение не нужно.

Оценки для эллиптических дифференциальных операторов

1. **Неравенство Гординга** (L.Gòrding, 1953, см., напр. [30]):

Пусть дана форма $\sum\limits_{|\alpha|\le k, |\beta|\le k} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha \eta^\beta$ с непрерывными в ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ комплексными коэффициентами $a_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющая условию[1]

$$\exists c > 0, \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=k, |\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha \eta^\beta \ge c\,|\,\xi\,|^{2k}.$$

Тогда существуют постоянные $c_1 > 0, c_2 > 0$ такие, что для любой $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k, |\beta|\le k} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \overline{D^\beta u}\, dx \ge c_1 \| u\|^2_{W_2^k(\Omega)} - c_2 \| u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.[2]

Линейный дифференциальный оператор $L = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ называется **эллиптическим** в области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$, если его старший символ $l(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ne 0$ для всех $x \in G, \xi \in \mathbf{R}^n, \xi \ne 0$, и называется **правильно** (или **собственно**)

[1] Заметим, что это условие влечёт правильную эллиптичность (см. ниже) в области Ω дифференциального оператора $Lu = \sum\limits_{|\alpha|\le k, |\beta|\le k} D^\beta \left(a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \right)$. Заметим также, что неравенство Гординга влечёт фредгольмовость (т.е. конечномерность ядра и коядра и совпадение их размерностей) оператора обобщённо поставленной задачи Дирихле, т.е. оператора $\Lambda : \overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega) \to \left(\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega) \right)'$, действующего на функциях $u \in C_0^\infty(\Omega)$ так же, как и L: $\Lambda u = Lu$, и непрерывно продолженного на $\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega)$. Здесь $\left(\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega) \right)'$ – сопряжённое оснащённое пространство (см. сноску[3] на стр. 21).

[2] См. [33], [34], [22].

эллиптическим в открытой или замкнутой области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$, если $m-$ чётно, $m = 2k$, и для любого $x \in G$, для каждой пары линейно независимых векторов действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_1^+, t_2^+, ..., t_k^+$ с положительной мнимой частью: $\operatorname{Im} t_1 > 0, \operatorname{Im} t_2 > 0, ..., \operatorname{Im} t_k > 0$ и k корней $t_1^-, t_2^-, ..., t_k^-$ с отрицательной мнимой частью: $\operatorname{Im} t_{k+1} < 0, ..., \operatorname{Im} t_{2k} < 0$. Отметим, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор – эллиптический. Отметим также, что при $n \geq 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это – не так (пример: оператор Коши-Римана $\partial / \partial \overline{z} = (\partial / \partial x - i \partial / \partial y) / 2$), и что то же справедливо для любых n в случае, когда коэффициенты оператора – вещественны (см. [33]).

Пусть нам даны: ограниченная область $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, $\nu(x)$ – векторное поле единичной нормали к $\partial\Omega$, заданное в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$, линейный дифференциальный оператор L порядка $m = 2k$ и некоторый набор из k линейных дифференциальных операторов $B_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$, $j = 1, ...k$, с гладкими коэффициентами, заданными на границе $\partial\Omega$.

Говорят, что **набор** B_j, $j = 1, ...k$ **нормален на** $\partial\Omega$, если $0 \leq m_j \leq 2k - 1$ и выполнены условия $\forall x \in \partial\Omega, \sum_{|\alpha| = m_j} b_{j\alpha}(x) \nu^\alpha \neq 0,\ j = 1, ...k$, где $\nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} ... \nu_n^{\alpha_n}$.

Для заданного правильно эллиптического в области $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ оператора L со старшим символом $l(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ для любого $x \in G$ и для каждой пары линейно независимых векторов действительных векторов ξ и η, введём полином $l^+(x, \xi, \eta; t)$ одной переменной t, построенный как $l^+(x, \xi, \eta; t) = \prod_{i=1}^{k} \left(t - t_i^+(x, \xi, \eta)\right)$, где $\{t_i^+(x, \xi, \eta)\}, i = 1, ...k -$ набор корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ одной переменной t, имеющих положительную мнимую часть.

Говорят, что **набор** $B_j, j = 1, ...k$ **накрывает оператор** L **на** $\partial\Omega$ или, что **система операторов** $\{L,\ B_j\}, j = 1, ...k$ **удовлетворяет условию дополнительности,** если для любого $x \in \partial\Omega$ и для любого касательного к $\partial\Omega$ вектора τ, набор полиномов одной переменной t $B_j(x, \tau + t\nu(x)) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) \left(\tau + t\nu(x)\right)^\alpha,\ j = 1, ...k$ является линейно независимым по модулю полинома $l^+(\ x\xi\ \eta,\ \ ;$, т.е. никакая линейная комбинация полиномов одной переменной $B_j(x, \tau + t\nu(x)),\ j = 1, ...k$ не делится на $l^+(x, \xi, \eta; t)$.

Говорят, что **система операторов** $\{L, B_j\}, j = 1, ...k$ **удовлетворяет условию Лопатинского на** $\partial\Omega$, если

1) оператор L – правильно эллиптический в области $\overline{\Omega}$,
2) набор $B_j, j = 1, ...k$ нормален на $\partial\Omega$,
3) набор $B_j, j = 1, ...k$ накрывает оператор L на $\partial\Omega$.

Условие Лопатинского в различных его формах было введено в 1953 г. как достаточное условие сводимости граничной задачи $Lu = f, B_j u = \varphi_j,\ j = 1, ..., k$ с матричными операторами L и B_j к эквивалентной системе интегральных уравнений (Я.Б. Лопатинский, Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. журнал, 5(1953), №2, с.123-151). Позже было показано, что это условие является и необходимым. Независимо и почти одновременно это же условие, используемое с той же целью, но для частного случая было опубликовано представительницей московской школы З.Я. Шапиро, поэтому часто условие Лопатинского называют условием Шапиро-Лопатинского. Это же условие часто называют условием регулярности граничной задачи, условием дополнимости, условием согласования или условием накрывания.

2. **Неравенство коэрцитивности** (.См. [33], [34], [22]):

Если система операторов $\{L, B_j\},\ j=1,...k$ удовлетворяет условию Лопатинского на $\partial\Omega$, то для любого $l \geq 2k$ и $p > 1$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждой $u \in W_p^l(\Omega)$ выполнена оценка [1]

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} \leq C\left(\|Lu\|_{W_p^{l-2k}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k}\|B_j u\|_{B_p^{l-m_j-1/p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)}\right).$$

3. **Шаудеровская оценка** (см., напр. [34]):

Если система операторов $\{L, B_j\},\ j=1,...k$ удовлетворяет условию Лопатинского на $\partial\Omega$, то для любого $l \geq 2k$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждой $u \in W_p^l(\Omega)$

$$\|u\|_{C^{l+\gamma}(\Omega)} \leq C\left(\|Lu\|_{C^{l-2k+\gamma}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k}\|B_j u\|_{C^{l-m_j+\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C(\Omega)}\right).$$

Первые оценки такого сорта были получены польским математиком Шаудером: J.Schauder, 1934.

[1] Напомним, что при нецелых $m > 0$, а также при $p = 2$ пространство Бесова $B_p^m(G)$ совпадает с пространством Соболева-Слободецкого: $W_p^m(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1968.
2. Харди (Hardy G.H.), Литтлвуд (Littlwood J.E.), Пойа (Polya G.) Неравенства, М.,1948.
3. Беккенбах (Beckenbach E.F.), Беллман (Bellman E.F.), Неравенства, М.,1965.
4. Полиа (Polya G.), Сегё (Szego G.), Задачи и теоремы из анализа, М.,1978.
5. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.:Мир, 1970, 720с.
6. Александров П.С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.
7. Келли Дж.Л., Общая топология, М.,1968.
8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М.,1979.
9. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Пространства основных и обобщённых функций, М.,1958.
10. Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряжённых операторов, К.,1965;
11. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства. М., 1961.
12. Ахиезер Н.И., Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.
13. T.Bonnesen. Math.Ann.,1921,Bd 84,S.216.
14. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, М., ОГИЗ, т.1, 1934 (оригинал 1931), т.2, 1945, (оригинал 1937)
15. Михлин С.Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977.
16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия. М., 1979.
17. Мазья В.Г. Пространства Соболева. Л.,1985.
18. Математическая энциклопедия, М., 1977-1985.
19. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1969.
20. Полиа Г., Сегё Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962.
21. Соболев С.Л., Уравнения математической физики, М.-Л., 1947.
22. Функциональный анализ (Справочная математическая библиотека), М.,1972.
23. Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.
24. Трибель Х., Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, М., 1980.
25. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
26. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
27. Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, М.:ИЛ, 1963;
28. Хавин В.П. Пространства аналитических функций, Итоги науки, Матем. анализ, М., 1966.
29. Фаддеев Д.К. и др. Избранные главы анализа, Л., 1981.
30. Иосида К. Функциональный анализ, М., 1967.
31. Хёрмандер Л., К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, М., 1959.
32. Забрейко П.П. и др., Интегральные уравнения (Справочная математическая библиотека), М., 1968.
33. Лионс Ж.-М., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., 1971.

34. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М.,1962.